数理解析研究所講究録 第2095巻 2018年 138-144



# 非加法的単調測度による $L_p$ 空間

本田あおい (九工大情報工)*1
岡崎 悦明 (ファジィシステム研究所)*2

## 1. はじめに

非加法的単調測度 $\mu$ に関する積分 $\int f d\mu$ として，Choquet 積分，菅野積分，Shilkret 積分，Lehrer 積分 (concave integral)，convex integral，包除積分 など数多く提案されてきた．従って $L_p$ 空間も積分に応じて多種の定義が考えられる．$L_p$ の自然な位相構造として

$$d(f,g)=\left(\int |f-g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

を $f$ と $g$ との“ノルム”または“距離”概念とするのは自然である．しかし，$\mu$ の非加法性により通常のノルムや距離の公理は満たさない場合がほとんどである．このためここではノルムや距離の条件を弱めた準ノルム，準距離を考える．多くの場合準距離空間または準ノルム空間となる．
本講演では Lehrer 積分に関する $L_p$ 空間を考察する．

## 2. 非加法的単調測度

**定義 1** ([2, 4]) $(X,\mathcal{B}(X))$ を測度空間，即ち $\mathcal{B}(X)$ は集合 $X$ 上の $\sigma-$ 加法族，とする．集合関数 $\mu:\mathcal{B}(X)\to[0,+\infty]$ が **非加法的単調測度** とは

1. $\mu(\emptyset)=0$,
2. $A\subset B,\ A,B\in\mathcal{B}(X)$ ならば $\mu(A)\leq\mu(B)$ (単調性)

が成り立つこと．$\mu$ が **準劣加法的** とは

3. $\exists K;\mu(A\cup B)\leq K(\mu(A)+\mu(B)),\ A,B\in\mathcal{B}(X)$

を満たすこと．$K=1$ のとき **劣加法的** と呼ばれる．$\mu$ が **零加法的** とは

4. $A,B\in\mathcal{B}(X),\mu(B)=0$ ならば $\mu(A\cup B)=\mu(A)$

を満たすこと．$\mu$ が **弱零加法的** とは

5. $A,B\in\mathcal{B}(X),\mu(A)=\mu(B)=0$ ならば $\mu(A\cup B)=0$

を満たすこと．$\mu$ が **零連続** とは

6. $A_n,A\in\mathcal{B}(X),A_n\uparrow A,\mu(A_n)=0$ ならば $\mu(A)=0$

を満たすこと．$\mu$ が **下から連続** とは

7. $A_n\uparrow A,\ A_n,A\in\mathcal{B}(X)\ \Rightarrow\mu(A_n)\uparrow\mu(A)$,

を満たすこと．

---

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.
本研究は科研費 (課題番号：15K05003) の助成を受けたものである。
*1 Kyushu Institute of Technology, 680-4 Kawazu, Iizuka, Fukuoka 820-8502, Japan
e-mail: aoi@ces.kyutech.ac.jp
*2 Fuzzy Logic Systems Institute, 680-41, Kawazu, Iizuka, Fukuoka 820-0067, Japan
e-mail: okazaki@flsi.or.jp

### 3. 準距離

**定義 2**　$T$ を集合とする．関数 $\rho(x,y) : T \times T \to [0,+\infty)$ が **準距離** とは

1. $\rho(x,y) \geq 0,\quad \rho(x,y) = 0 \iff x = y,\quad x, y \in T,$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x),\quad x, y \in T,$
3. $\exists K \geq 1\ ;\ \rho(x,y) \leq K\left(\rho(x,z) + \rho(z,y)\right),\quad x, y, z \in T$

が満たされること．2 および 3 のみを満たすとき **擬準距離** と呼ぶ．

準距離は $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \in T$ に対して次の式が成り立つ：

$$d(x_0, x_n) \leq K^{n-1}(d(z_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)).$$

ここで一般に $K^{n-1} \to +\infty$ なので，完備性を考察する場合は不都合が出そうである．更には三角不等式が成り立たないので

関数 $d(x,y)$ はそれ自身の定める位相に関して連続とは限らない

という事態が起こり得る．この場合はコーシー列による完備化の議論ができない．従って準距離を扱う際には注意深く議論を進める必要がある．実際は Frink の距離付定理 (1938) によりある程度これらの不都合は緩和される．

距離と準距離の中間に位置する距離関数として，次の性質を満たすものを考えることができる；

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y,$

2. $d(x,y) = d(y,x),$

3. $\exists C \geq 1 : d(x,y) \leq d(x,z) + Cd(z,y).$ このときは次が成り立ち，かなり良い距

離である：

$$d(x_0, x_n) \leq d(z_0, x_1) + C(d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)),$$

$$|d(x,u) - d(y,v)| \leq C(d(x,y) + d(u,v)).$$

**定義 3**　線形空間 $L$ 上の関数 $|x|_L : L \to [0, \infty)$ が準ノルムとは

1. $|x|_L = 0 \iff x = 0,$
2. $|cx|_L = |c||x|_L,$
3. $\exists M \geq 1\ ;\ |x+y|_L \leq M\left(|x|_L + |y|_L\right)$

が満たされること．

このとき $d(x,y) = |x-y|_L$ は $L$ 上の準距離である．

## 4. Lehrer 積分 ([3])

非負可測関数 $f:(X,\mathcal{B}(X))\to[0,+\infty]$ に対する Lehrer 積分は次で定義される：

$$(L)\int_X f d\mu := \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i)\;\middle|\; n\in I\!N, A_i\in\mathcal{B}(X), 0\leqq a_i\leqq +\infty, \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}\leqq f\right\}.$$

この定義において階段関数型の関数

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$$

において，集合列 $\{A_i\}$ は必ずしも disjoint ではないことに注意する必要がある．Lehrer 積分は，$f$ に対して考えうる最大の値を導出する積分である．

**命題 1**([3])

(1) $f=0\ \mu-a.e.\ \Rightarrow (L)\int_X fd\mu=0.$
(2) $0\leqq f\leqq g\ \Rightarrow 0\leqq (L)\int_X fd\mu\leqq (L)\int_X gd\mu.$
(3) $(L)\int_X \chi_A d\mu\geqq\mu(A).$
(4) for $c>0\Rightarrow (L)\int_X cfd\mu=c\cdot(L)\int_X fd\mu.$
(5) for $f,g\geqq 0\Rightarrow (L)\int_X (f+g)d\mu\geqq (L)\int_X fd\mu+(L)\int_X gd\mu$ [concavity].

## 5. 非加法的単調測度に関する仮定について

[要請 1]

- $\mu$ の優加法性 $\mu(A\cup B)\geq\mu(A)+\mu(B)$ を排除しない，即ち劣加法性は仮定しない，
- $L_p$ は準ノルムまたは準距離を持つことを要請する，

これらの条件を考慮し $\mu$ は準劣加法的とする．すなわち

$$\exists K\geq 1;\mu(A\cup B)\leq K(\mu(A)+\mu(B))$$

とする．

[要請 2]

- 可測関数に次の同値関係を導入する：
$f\sim g\iff f=g\ \mu-\text{a.e.}\iff \mu(|f-g|>0)=0.$

この条件を考慮し，$\mu$ は零加法的であること

$$\mu(N) = 0 \Rightarrow \mu(A \cup N) = \mu(A)$$

および零連続性

$$A_n \uparrow A, \mu(A_n) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$$

を仮定することがある(これはその都度明示する)．

## 6. Lehrer 積分に関するする関数空間 $L_p(L)(1 \leqq p < +\infty)$

実可測関数 $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (-\infty, +\infty)$ に対して

$|f|_p := \left((L) \int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$,

$\mathcal{L}_p := \{f \mid |f|_p < +\infty\}$, $\mathcal{N}_p := \{f \in \mathcal{L}_p \mid |f|_p = 0\}$, $\mathcal{Z}_p := \{f \in \mathcal{L}_p \mid f = 0\ \mu - a.e.\}$,

$L_p(L) = \mathcal{L}_p/\mathcal{Z}_p$.

とする ([1]).

**補題 1**

1. $\mu$ が準劣加法的ならば $\mathcal{Z}_p$ は $\mathcal{L}_p$ の線形部分空間である.
2. $\mathcal{Z}_p \subset \mathcal{N}_p$.
3. $\mu$ が零連続ならば $\mathcal{Z}_p = \mathcal{N}_p$である.
4. $\mu$ が零加法的ならば $|f \pm h|_p = |f|_p, h \in \mathcal{Z}_p$.

**Remark** **命題** (5) より, $|f \pm h|_1 = |f|_1, h \in \mathcal{N}$.

**Proof of 1**

For $f, g \in \mathcal{Z}_p$, we have $\mu(f \neq 0) = \mu(g \neq 0) = 0$. Since $\{f + g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} \cup \{g \neq 0\}$, by the zero-additivity of $\mu$, it follows that $\mu(f + g \neq 0) = 0$. So that we have $f + g \in \mathcal{Z}_p$.

For every $t \neq 0$ and $f \in \mathcal{Z}_p$, we have $\mu(\{tf \neq 0\}) = \mu(\{f \neq 0\}) = 0$, which implies that $\mathcal{Z}_p$ is a linear space.

**Proof of 2**

Assume $f \in \mathcal{Z}_p$, that is, $\mu(|f|^p > 0) = 0$. This implies $\mu(|f|^p > r) = 0$ for any $r > 0$. Then for every simple function $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \leqq |f|^p$, we have $\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = 0$ and we have $|f|_p = 0$.

**Proof of 3**

Assume $|f|_p = 0$. If $\mu(|f|^p > 0) > 0$. By the continuity from below, there exists $r > 0$ such that $\mu(|f| > r) > 0$. Then we have $|f|^p \geqq r^p \chi_{\{|f| > r\}}$. By the definition of Lehrer integral, it follows that $(L) \int_X |f|^p d\mu \geqq r^p \mu(|f| > r) > 0$, which contradicts to $|f|_p = 0$. So that we have $\mu(|f| > 0) = 0$ which means $f = 0\ \mu - a.e.$

**Proof of 4**

If we put $N = \{|h| > 0\}$, since $h \in \mathcal{Z}_p$, we have $\mu(N) = 0$. Since $1 = \chi_N + \chi_{X\setminus N}$, $\mu(N) = 0$, by **命題 1 (1), (5)**,

$$\begin{aligned}(L)\int_X |f \pm h|^p d\mu &= (L)\int_X (|f \pm h|^p \chi_N + |f \pm h|^p \chi_{X\setminus N}) d\mu \\ &\geqq (L)\int_X |f \pm h|^p \chi_N d\mu + (L)\int_X |f \pm h|^p \chi_{X\setminus N} d\mu \\ &= (L)\int_X |f \pm h|^p \chi_{X\setminus N} d\mu = (L)\int_X |f|^p \chi_{X\setminus N} d\mu.\end{aligned}$$

Remark that $N$ is a strongly $\mu$-null set (零加法性), so that we have $(L)\int_X |f|^p d\mu = (L)\int_X (|f|^p \chi_{X\setminus N} + |f|^p \chi_N) d\mu = (L)\int_X |f|^p \chi_{X\setminus N} d\mu$. In fact, this follows from $\mu(A) = \mu([A \cap (X\setminus N)] \cup [A \cap N]) = \mu(A \cap (X\setminus N))$.

**補題 2** $\mu$ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき

1. $|cf|_p = |c| \cdot |f|_p, \ c \in \mathcal{R}, f \in \mathcal{L}_p$,
2. $|f + g|_p \leq 2K^{\frac{1}{p}}(|f|_p + |g|_p), \ f, g \in \mathcal{L}_p$.

**Proof**

1. is clear.

2. First we shall show $|f + g|_1 \leqq 2K\{|f|_1 + |g|_1\}$, $f, g(\geqq 0) \in \mathcal{L}_1$. Let $0 \leqq \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \leqq f + g$. Then it holds either $f \geqq \frac{1}{2}\varphi$ or $g \geqq \frac{1}{2}\varphi$. If we set $E(f) := \{x \mid 2f(x) \geqq \varphi(x)\}$, $E(g) := \{x \mid 2g(x) \geqq \varphi(x)\}$, $E(f) \cup E(g) = X$ and the simple function $\psi = \chi_{E(f)} + \chi_{E(g)}$ satisfies $1 \leqq \psi \leqq 2$. So that we have $\varphi \leqq \varphi \cdot \psi = \varphi \cdot \chi_{E(f)} + \varphi \cdot \chi_{E(g)}$. Since

$$\varphi \cdot \chi_{E(f)} = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i \cap E(f)} \leqq 2f,$$

$$\varphi \cdot \chi_{E(g)} = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i \cap E(g)} \leqq 2g,$$

we have

$$\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap E(f)) \leqq (L)\int_X 2f d\mu = 2(L)\int_X f d\mu,$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap E(g)) \leqq (L)\int_X 2g d\mu = 2(L)\int_X g d\mu.$$

By the quasi-subadditivity of $\mu$, for the set $A_i = \{A_i \cap E(f)\} \cup \{A_i \cap E(g)\}$, we have

$$\mu(A_i) \leqq K\left(\mu(A_i \cap E(f)) + \mu(A_i \cap E(g))\right).$$

So that we have

$\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$
$\leqq K\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap E(f)) + \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap E(g))\right)$

$\leqq 2K\{(L)\int_X f d\mu + (L)\int_X g d\mu\}$,

which implies $(L)\int_X (f+g)d\mu \leqq 2K\{(L)\int_X f d\mu + (L)\int_X g d\mu\}$.
For $p \geqq 1$, by utilizing the case of $p=1$, we have

$$\begin{aligned}
|f+g|_p^p &= (L)\int_X (|f+g|^p)d\mu \leqq (L)\int_X 2^{p-1}\{|f|^p+|g|^p\}d\mu \\
&= 2^{p-1}(L)\int_X (|f|^p+|g|^p)d\mu \leqq 2^{p-1}2K\left\{(L)\int_X |f|^p d\mu + (L)\int_X |g|^p d\mu\right\} \\
&= 2^p K\left\{|f|_p^p + |g|_p^p\right\}.
\end{aligned}$$

**Lehrer's $L_p$ space $L_p(L)$ の定義**
$1 \leqq p < +\infty$ とする．$\mu$ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき

$$L_p(L) = \mathcal{L}_p / \mathcal{Z}_p$$

$$\|f + \mathcal{Z}_p\|_p := |f|_p \text{ for } f + \mathcal{Z}_p \in L_p(L).$$

と定義する．

**補題 1** より, $\|f + \mathcal{Z}_p\|_p$ は代表元の取り方に依らない．以下同値類 $f + \mathcal{Z}_p$ と代表元 $f$ を同一視し，$\|f\|_p = \|f + \mathcal{Z}\|_p$ と記す.
**補題 1, 2** により $\|f\|_p$ を $L_p(L)$ 上に定義でき，$(L_p(L), \|f\|_p)$ は準ノルム空間となり，以下を満たす；

(1) $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p,\ c \in \mathbb{R}, f \in L_p(L)$.
(2) $\|f+g\|_p \leqq 2K^{\frac{1}{p}}(\|f\|_p + \|g\|_p)$ for $f, g \in L_p(L)$.

**例** $D \subset X$ とし，測度 $\mu$ を

$$\mu(A) = 1 \text{ if } A \cap D \neq \emptyset$$
$$\mu(A) = 0 \text{ if } A \cap D = \emptyset$$

とする．これは集合 $D$ の定義関数 $\chi_D$ を可能性分布関数とする可能性測度と呼ばれる単調測度である．$\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$ を満たす．このとき

$L_1(\mathrm{cav}) = \ell_1(D) = \{(a_d)_{d\in D} \mid \sum_{d\in D} |a_d| < +\infty\}$

である．

**7.** $L_\infty$

可測関数 $f$ が本質的に有界であるとは

$$\exists\alpha \geq 0 \;\; ; \;\; \mu(|f| > \alpha) = 0.$$

本質的に有界な関数 $f$ に対して

$$|f|_\infty = \inf\{\alpha \geq 0 \mid \mu(|f| > \alpha) = 0\}.$$

と置く．さらに

$$\mathcal{L}_\infty = \{f \mid |f|_\infty < +\infty\},$$

$$\mathcal{N}_\infty = \{f \in \mathcal{L}_\infty \mid |f|_\infty = 0\}, \text{ and}$$

$$L_\infty = \mathcal{L}_\infty / \mathcal{N}_\infty,$$

とする．

$L_\infty$ の性質

**命題 2**
$\mu$ ha は零連続とする．このとき次は同値である．
$|f|_\infty = a$
$\iff$
(1) $\mu(|f| > a) = 0$ and
(2) for every $b < a, \mu(|f| > b) > 0.$

このとき　$|f|_\infty = \min\{\alpha \geq 0 \mid \mu(|f| > \alpha) = 0\}.$ である（定義中の inf は実際に最小値を与える）．

**命題 3**
$|f|_\infty$ は $L_\infty$ のノルムである．．

## 参考文献


[1] 本田あおい, 岡崎悦明, ファジィ測度に対する concave および convex integrals とその $L_p$ 空間の準距離構造，実解析学シンポジウム 2016 講演集，pp.19–24，2016 年 10 月 21 日 (奈良女子大学).

[2] 河邉　淳，非加法的測度と非線形積分-理論的展開に焦点を当てて-，数学，第 68 巻 第 3 号，2016 年 7 月 夏季号，pp.266–292，2016.

[3] E. Lehrer, *A new integral for capacities*, Econom. Theory, **39** (2009), 157–176.

[4] 室伏俊明・菅野道夫 ：ファジィ測度, 講座ファジィ3，日刊工業新聞社，1991.